

# Construcción de mapas dinámicos: comparativa

José María Cañas  
Universidad Rey Juan Carlos

Lía García  
Instituto de Automática Industrial

Enero de 2002

## Resumen

Los robots móviles autónomos necesitan representar los obstáculos de su entorno para tomar decisiones de movimiento adecuadas. Para mayor autonomía el robot debe construir automáticamente esa representación desde su información sensorial. Una representación posible son los mapas de ocupación en forma de rejilla, que estiman el estado de ocupación del espacio particionado en celdillas. El presente trabajo compara el carácter dinámico de distintas técnicas para la elaboración y actualización de esos mapas: probabilística, borrosa, histográfica y de teoría de la evidencia. Se definen dos criterios que caracterizan el comportamiento dinámico de la representación construida: tiempo en incorporar un nuevo obstáculo y tiempo en reflejar la desaparición de un obstáculo. Se proponen dos nuevas técnicas orientadas a mejorar la percepción de los objetos móviles: la primera utiliza una ecuación diferencial y la segunda una memoria local asociada a cada celdilla sobre la cual se decide por mayoría. Ambas se comparan con los enfoques más conocidos a la luz de los criterios anteriores.

## 1 Introducción

Una de las habilidades principales en robótica móvil es la representación del entorno en que se mueve el robot, en concreto representar la existencia de obstáculos con los cuales éste puede chocar en su movimiento por el mundo. Tradicionalmente esa representación o mapa del entorno era introducida en el robot por el diseñador humano. El progreso hacia una mayor autonomía en los robots navegantes ha llevado a dotarlos de mecanismos que les permiten construir y mantener autónomamente esos mapas desde su propia información sensorial.

La mayoría de los trabajos en representación del entorno para robots móviles dividen la información en dos partes que se tratan separadamente. Primeramente un *mapa global* refleja los obstáculos estáticos como paredes, armarios, etc. y permite planificación de largo plazo. En segundo lugar una *representación instantánea*, básicamente la última lectura sensorial, que permite reaccionar a obstáculos imprevistos. En este trabajo compararemos varias técnicas de construcción de mapas con la idea de mantener una representación local al robot que capture el dinamismo de los objetos móviles a su alrededor.

Dentro de los mapas métricos se puede distinguir dos paradigmas, el modelo de elementos geométricos [Leonard92] y el de rejillas de ocupación [Elfes90][Moravec88]. En el primero se tienen unas primitivas de representación (puntos, esquinas, paredes, objetos, etc) cuya posición se estima constantemente desde la información sensorial. Hemos preferido el segundo, que representa el espacio como un mallado regular de celdillas, cada una de las cuales contiene la creencia en que esa posición en el mundo esté ocupada o no. No necesita estructura en el entorno para conseguir una representación adecuada y facilita la fusión de datos sensoriales procedentes de sensores muy distintos. Además representa explícitamente el espacio vacío, que resulta muy útil para la tarea de sortear obstáculos. En la figura 1 se puede observar un ejemplo de una rejilla alrededor del robot, las casillas oscuras indican la presencia de un obstáculo en ellas, y las claras de espacio vacío.

Para comparar las distintas técnicas de construcción de mapas dinámicos nos hemos centrado en la información proporcionada por los *sensores sonar* de un robot B21 comercial. Este tipo de sensor mide la distancia al objeto más próximo utilizando el eco de una onda ultrasónica y su empleo está muy difundido en la comunidad robótica. Las técnicas descritas también se han utilizado en un robot de exteriores casero, equipado con un sensor laser de proximidad, que proporciona medidas de ocupación mucho más fiables. En ambos casos las técnicas de construcción son exactamente las mismas, sólo hemos variado el modelo sensorial para reflejar las peculiaridades de cada sensor.

---

El trabajo descrito en este artículo ha sido objeto de ayuda del programa PROFIT, (proyecto FIT-070000-2001-118) con cargo al presupuesto de gastos del Ministerio de Ciencia y Tecnología

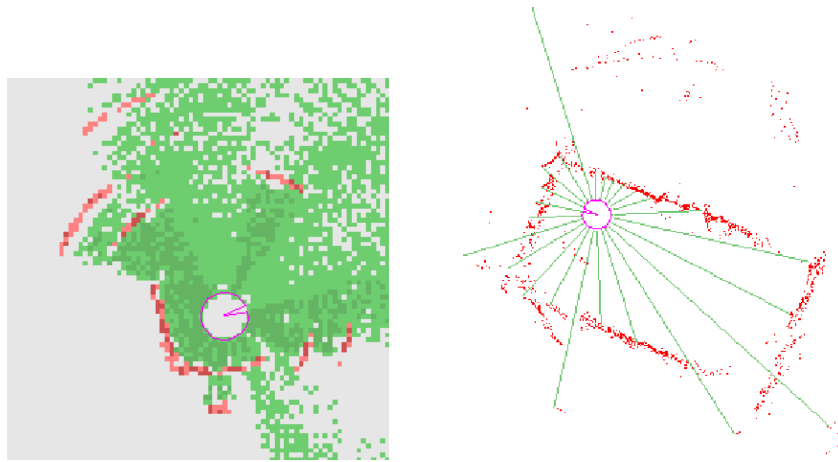


Figura 1: Ejemplo de grid construido con el robot B21 (izda.) y lecturas sonar instantáneas (dcha.)

## 1.1 ¿Por qué fusionar?

Un robot autónomo percibe el estado de su entorno a través de sus sensores. La última lectura de todos sus sensores le proporciona una *instantánea* sobre el estado de sus alrededores, como muestra la figura 1. Sin fusionar lecturas siempre tendremos esta instantánea sensorial, continuamente refrescada (en nuestro robot concreto cada sensor 3 medidas por segundo). Debido a su simplicidad (en nuestro caso 24 valores enteros) y a su vivacidad, esta representación ha sido utilizada en muchos casos para construir comportamientos reactivos sobre ella, por ejemplo el sorteo de obstáculos.

Nosotros utilizamos un grid para materializar la fusión de información procedente de múltiples lecturas sensoriales. Con un grid se puede recordar la información de zonas próximas o zonas que de repente quedan ocultas por un obstáculo intermedio. La fusión también ayuda a depurar errores sensoriales y perfilar mejor el contorno de los obstáculos, compensando las lecturas erróneas con las medidas correctas, previsiblemente más numerosas. Esta compensación es especialmente adecuada para los sensores sonar porque sus medidas son propensas a ruidos.

Finalmente la fusión también permite la identificación de estímulos complejos, que no caben en una lectura instantánea. Permite acumular indicios, evidencias parciales. Esto resulta crucial cuando una instantánea sensorial por sí sola no es concluyente sobre la existencia de tal o cual estímulo. Un ejemplo podría ser el estímulo pared. La última instantánea sonar se ve afectada por la existencia de una pared próxima o no, pero desde esa instantánea es imposible distinguir si se trata de una pared o de cualquier otro obstáculo. Será la acumulación de varias lecturas, y el alineamiento de las celdillas ocupadas lo que permitirá concluir que el obstáculo concreto es una pared.

## 1.2 Mapas estáticos vs mapas dinámicos

Normalmente tendremos al robot sensando continuamente el estado de su entorno *a la vez* que realiza sus maniobras. Tendremos un flujo constante de lecturas sensoriales, no un conjunto finito y estático. La construcción en tiempo real de una representación fiable irá en paralelo a la toma de decisiones sobre esa misma representación.

Otro requisito crucial es su carácter dinámico. El objetivo de los mapas del entorno que generamos es servir de base para todos los comportamientos del robot, incluido los reactivos. Por lo tanto deben reflejar con celeridad los cambios, tanto los nuevos obstáculos que aparecen como los nuevos huecos que surgen cuando los obstáculos se mueven.

Este escenario dinámico y en tiempo real es radicalmente distinto de la construcción de mapas estáticos, donde interesa reflejar los obstáculos fijos de determinado entorno y los mapas se pueden construir fuera de línea.

## 2 Trabajos relacionados

El problema de construcción y mantenimiento de grids de ocupación ha sido ampliamente abordado en la literatura. En general este problema se ha dividido en dos etapas. Primeramente se captura toda la información que proporciona una nueva lectura del sensor sobre la ocupación del espacio, siguiendo determinado *modelo sensorial*. En la segunda etapa esa información se utiliza para *actualizar la creencia acumulada*, materializando la fusión con otras medidas anteriores. La geometría de los modelos no se ha tenido en cuenta en la comparativa de este artículo, que hace énfasis en el dinamismo de la regla de actualización.

En esta sección hemos agrupado los enfoques más representativos a la hora de representar la creencia de ocupación y de incorporar la información de nuevas observaciones sensoriales: el modelo probabilístico bayesiano, la teoría de la evidencia, los conjuntos borrosos y el enfoque histográfico de Borenstein.

### 2.1 Enfoque probabilístico

El enfoque probabilístico es el más utilizado en la bibliografía y fue iniciado por Alberto Elfes [Elfes90] y Hans Moravec [Moravec88]. Se asume que cada celdilla del grid puede tener únicamente uno de los dos estados: ocupada o vacía, que se tratará de estimar desde las observaciones sensoriales acumuladas. El conocimiento que el robot tiene en el instante  $t$  sobre la ocupación de la celdilla situada en  $(x, y)$  se refleja en la *probabilidad* de que la celdilla esté en alguno de los dos estados posibles condicionada a las observaciones que se han obtenido hasta ese momento. Así lo expresa la ecuación (1), donde  $data(t - 1)$  supone el conjunto de observaciones acumuladas hasta el instante  $t - 1$  y  $obs(t)$  la observación actual. Cuando la probabilidad de ocupación es cercana a 0 entonces se está muy seguro que tal celdilla está vacía. Por el contrario cuando es próxima a 1 entonces se tiene mucha confianza en que esa celdilla está ocupada. Inicialmente todas las casillas del grid tienen valor 0.5, reflejando el desconocimiento total.

En desarrollos probabilísticos recientes se parte del *modelo sensor a posteriori*, que marca la probabilidad de que la celdilla está ocupada o no dado tal o cual lectura del sonar  $obs(t)$ , es decir,  $p(ocupada/obs(t))$ . Por ejemplo en [Matía98] se utiliza un modelo sonar que vale  $p(ocupada/obs(t)) = 0.4$  en las celdillas más cercanas al sensor que el radio observado y  $p(ocupada/obs(t)) = 0.6$  en las celdillas más o menos coincidentes con ese radio. Para celdillas más distantes el modelo ofrece  $p(ocupada/obs(t)) = 0.5$ , que no aporta ninguna información en el enfoque probabilístico. Cuanto más se acerque a los extremos de probabilidad, 0 ó 1, más certidumbre aporta esa medida en un sentido u otro.

### Actualización con regla de Bayes

A medida que el robot recibe nuevas observaciones sensoriales su información se va incorporando al grid, actualizando las probabilidades almacenadas y haciéndolas evolucionar. Siguiendo un desarrollo paralelo a [Martin96] [Margaritis98] se llega a la formulación incremental (3) de la regla de Bayes. Esta formulación maneja modelo a posteriori del sensor y *ratios de probabilidad*, definido como (2).

$$p_{ocupada}(C_{(x,y)}, t) = p(ocupada/obs(t), data(t - 1)) \quad (1)$$

$$\rho_{mapa} = p_{ocupada} / (1 - p_{ocupada}) \quad (2)$$

$$\rho_{mapa}(C_{(x,y)}, t) = \frac{\rho_{obs}}{\rho_{apriori}} * \rho_{mapa}(C_{(x,y)}, t - 1) \quad (3)$$

Si una lectura sonar proporciona información sobre el estado de determinada celdilla  $C_{(x,y)}$ , el valor del modelo de sensor  $p(ocupada/obs(t))$  en esa posición determina, a través de  $\rho_{obs}$ , si allí la probabilidad de ocupación sube o baja después de la nueva observación. El denominador  $\rho_{apriori}$  simplemente normaliza la influencia de  $\rho_{obs}$ . Si  $p(ocupada/obs(t)) = p(ocupada)$  entonces la observación no aporta ninguna información adicional sobre el conocimiento a priori y la probabilidad acumulada no cambia. Si  $p(ocupada/obs(t)) > p(ocupada)$  entonces aumenta la probabilidad global en la ocupación de esa celdilla. Recíprocamente, cuando  $p(ocupada/obs(t)) < p(ocupada)$  la probabilidad acumulada disminuye.

Utilizar probabilidades permite tener un marco teórico fiable a la hora de realizar ciertas operaciones, cálculos e hipótesis con la información disponible. Otra ventaja sustancial es que (3) permite una formulación incremental, muy eficiente desde el punto de vista de tiempo y memoria requeridas en la actualización.

Uno de los inconvenientes de la actualización con regla de Bayes es que requiere que las distintas observaciones que se incorporan al grid sean *independientes*, al menos en sentido markoviano. Esto no siempre se puede asegurar cuando se tiene un flujo continuo de sensaciones. Otra desventaja es que no da medida alguna de *confianza*.

## 2.2 Teoría de la evidencia

La teoría de la evidencia se basa en la definición de un *campo de discernimiento*  $\Theta$ , que es un conjunto de etiquetas que representan eventos mutuamente excluyentes. Tal y como se describe en [Pagac98], para nuestra aplicación de mapas de ocupación las etiquetas interesantes son  $\Theta = \{E, F\}$  porque las celdillas del grid pueden estar vacías,  $E$ , u ocupadas,  $F$ . Se define también una *asignación básica de probabilidad* como una función  $m : \Psi \rightarrow [0, 1]$ , donde  $\Psi$  es el conjunto de todos los subconjuntos posibles de  $\Theta$ , en nuestro caso  $\Psi = \{\emptyset, E, F, \{E, F\}\}$ .

El estado de cada celdilla se define asignando números de probabilidad a cada etiqueta en  $\Psi$ , en nuestro caso cuatro números. Sin embargo asumiendo  $m_{mapa}(\emptyset) = 0$  y aplicando (4) basta almacenar dos de ellos,  $m_{mapa}(E)$  y  $m_{mapa}(F)$ , para caracterizar el conocimiento sobre la ocupación de la celdilla en este enfoque. El desconocimiento absoluto se refleja en  $m_{mapa}(E) = 0$ ,  $m_{mapa}(F) = 0$  y por lo tanto  $m_{mapa}(E, F) = 1$ . Cuando se está seguro que una celdilla está vacía entonces  $m_{mapa}(E) = 1$  y el resto se anula. Recíprocamente cuando se está seguro de que está ocupada  $m_{mapa}(E) = 0$ .

La geometría de sensor que emplea [Pagac98] es un cono de propagación. Para las celdillas dentro del arco el modelo viene dado por  $(m_{sensor}(F) = \frac{1}{n}, m_{sensor}(E) = 0)$ , donde  $n$  corresponde al número de celdillas situadas en el arco. Para las celdillas en el interior del sector el modelo utilizado es  $(m_{sensor}(F) = 0, m_{sensor}(E) = \rho)$ , donde  $\rho$  es un factor constante de ajuste que iguala la masa total de evidencia asignada a las celdas vacías y a las ocupadas en cada lectura.

$$m_{celdilla(x,y)}(E) + m_{celdilla(x,y)}(F) + m_{celdilla(x,y)}(E, F) = 1 \quad (4)$$

### Actualización con regla de Dempster-Shafer

La regla de Dempster-Shafer permite combinar evidencias sobre el evento  $A$ ,  $m_1(A)$  y  $m_2(A)$ , que en nuestro caso serán las asignaciones básicas de probabilidad acumuladas en cada celdilla del mapa para los eventos vacío  $E$  y ocupado  $F$ , y las proporcionadas por la última lectura sonar. Siguiendo el desarrollo de [Pagac98] se llega por ejemplo a (6).

$$\begin{aligned} m_{mapa}^t(E) &= (m_{mapa}^{t-1} \oplus m_{sensor(t)})(E) & (5) \\ m_{mapa}^t(E) &= \frac{m_{mapa}^{t-1}(E)m_{sensor(t)}(E) + m_{mapa}^{t-1}(E)m_{sensor(t)}(\{E, F\}) + m_{mapa}^{t-1}(\{E, F\})m_{sensor(t)}(E)}{1 - m_{mapa}^{t-1}(E)m_{sensor(t)}(F) - m_{mapa}^{t-1}(F)m_{sensor(t)}(E)} & (6) \end{aligned}$$

Una ventaja de este enfoque es que contempla explícitamente la ambigüedad tanto en las medidas como en la creencia acumulada. El factor  $m_{mapa(t)}(\{E, F\})$  representa la incertidumbre almacenada. También se representa la contradicción: una misma celdilla puede recoger a lo largo del tiempo tanto lecturas que indican que está ocupada ( $m_{mapa(t)}(E)$ ) como lecturas contradictorias que apuntan lo contrario ( $m_{mapa(t)}(F)$ ). Si queremos resumir la creencia en un único valor necesitamos destilar esa creencia final convenientemente. En esa combinación irá implícitamente una compensación entre las evidencias de ocupación y vacío almacenadas en cada celdilla.

## 2.3 Enfoque borroso

En la aproximación borrosa, descrita en [Poloni95], [Gambino96],[Ribo01] y [Oriolo98], el mapa se almacena como *dos conjuntos borrosos* no complementarios: el de zonas vacías  $\varepsilon$  y el de zonas ocupadas  $o$ . Cada *celdilla*  $(x, y)$  del espacio pertenece en cierta medida a cada uno de los conjuntos y esa pertenencia es una función de pertenencia borrosa  $\mu_\varepsilon(x, y)$ ,  $\mu_o(x, y)$ .

La información de una lectura sonar  $k$  se captura igualmente con dos conjuntos borrosos  $\varepsilon^k$  y  $o^k$ , que reflejan precisamente la evidencia de vacío y ocupación que aporta esa lectura  $k$  a las diferentes celdillas del espacio. Por ejemplo en [Poloni95] se utilizan los modelos de la figura 2

### Actualización con el operador borroso unión

Los conjuntos borrosos con las creencias globales se definen como la unión borrosa de las evidencias recogidas en cada lectura (7)(8). La operación de unión borrosa es asociativa, por ello estas ecuaciones (7) y (8) permiten una implementación incremental, eficiente desde el punto de vista práctico. En la formulación clásica [Poloni95]

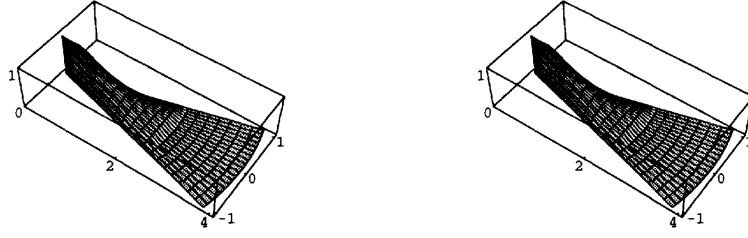


Figura 2: Modelo borroso sonar para información de ocupación (izquierda) y de vacío (derecha) [Poloni95].

se han propuesto varios operadores de unión borrosa: producto algebraico (9), producto acotado (10), operador Dombi, operador Yager.

$$o = \bigcup_{i=1}^{i=k} o^i = \left( \bigcup_{i=1}^{i=k-1} o^i \right) \cup o^k \quad (7)$$

$$\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{i=k} \varepsilon^i = \left( \bigcup_{i=1}^{i=k-1} \varepsilon^i \right) \cup \varepsilon^k \quad (8)$$

$$(A \cup B)(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) * \mu_B(x) \quad (9)$$

$$(A \cup B)(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)) \quad (10)$$

Una de las ventajas de la aproximación borrosa señaladas en [Gambino96] es que no necesita tantas asunciones teóricas como el desarrollo probabilístico y se tiene más libertad a la hora de diseñar el modelo sensorial y los operadores borrosos.

Las evidencias de ocupación y de vacío no son contradictorias en este enfoque. Precisamente por ello la aproximación borrosa exhibe una mayor robustez frente a medidas erróneas esporádicas que el enfoque probabilístico, como señalan [Gambino96] y [Oriolo98]. Combinando los dos conjuntos borrosos globales se puede distinguir entre zonas ambiguas y zonas desconocidas, es decir, información contradictoria y ausencia de información.

## 2.4 Enfoque histográfico

El enfoque histográfico fue presentado por Johann Borenstein y Y. Koren [Borenstein91]. En él cada celdilla mantiene un valor de certidumbre  $CV$  indicando la confianza en la existencia de un obstáculo en esa posición, que se mueve entre  $CV_{min} = 0$  y  $CV_{max} = 15$ . Para utilizar el mapa se suele binarizar la creencia de ocupación comparando el valor almacenado en cada celdilla con cierto umbral, por ejemplo 12. Sólo las casillas con evidencia superior se consideran realmente ocupadas.

El modelo histográfico utilizado en [Borenstein91] tiene geometría axial, sólo modifica las celdillas del eje central perpendicular al sensor que ha realizado la medida. Para la celdilla en el radio medido  $\Delta(t) = +3$  y en casillas más próximas  $\Delta(t) = -1$

### Regla de actualización histográfica

La mezcla de información se hace empleando una regla aditiva heurística (11) que suma el valor del modelo sensorial al acumulado en la celdilla.

$$CV_{i,j}(t+1) = CV_{i,j}(t) + \Delta(t) \quad (11)$$

En el trabajo de Borenstein [Borenstein91] sí hay un estudio explícito del carácter dinámico de la representación. La regla de actualización contempla la posibilidad de que la creencia pueda cambiar completamente de sentido con un número finito de observaciones sensoriales. Tantas veces como se necesite e independientemente de lo confiado que se estuviera en la creencia anterior. Se considera el *número crítico de medidas* necesarias para dar una creencia por firme. Ese valor marca la velocidad máxima de los obstáculos que puede reflejar el grid tal y como está construido.

Otra ventaja es que no necesita que las observaciones sensoriales sean independientes, se incorporan todas. Tampoco se hipotetiza cómo se distribuyen las medidas del sensor dada una configuración del mundo. Es la compensación entre unas y otras la que va conformando la *distribución de probabilidad* en el espacio.

### 3 Enfoques dinámicos

Ya hemos comentado las aproximaciones más destacadas en la literatura, ahora pasamos a describir las dos propuestas que hacemos para mejorar el dinamismo en la representación que se consigue con los enfoques anteriores. El primer enfoque se basa en el grid histográfico, pero reemplazando la regla de actualización aditiva por una ecuación diferencial. En la segunda aproximación cada celdilla lleva asociada una memoria de corto plazo, en la que se van almacenando las últimas medidas. Se decide el estado de la celdilla por mayoría sobre esa memoria.

El *estado de ocupación* de cada celdilla  $C_{(x,y)}$  es una variable gradual, continua, que oscila entre un valor máximo  $E_{max}$  para señalar ocupación y un valor mínimo  $E_{min} = -E_{max}$  para señalar certeza de vacío.

En ambas propuestas se utiliza un modelo lobular que asigna un peso positivo  $\Delta(t) = +1$  a las celdillas situadas en el arco de ocupación y un peso negativo  $\Delta(t) = -1$  a las situadas en el interior del lóbulo les asigna un valor negativo para indicar evidencia de vacío. Cuanto mayor es el valor absoluto mayor es la influencia de la medida en esa celdilla.

#### 3.1 Actualización con ecuación diferencial

En este enfoque se actualiza el estado de ocupación de cada celdilla siguiendo la ecuación diferencial (12), que tiene sus raíces en la propuesta por Hans Moravec en [Moravec88]. El cambio en la creencia de ocupación será un incremento o decremento dependiendo del signo de  $\Delta(t)$ . La amplitud del cambio depende de varios factores.

$$creencia(C_{(x,y)}, t) = creencia(C_{(x,y)}, t - 1) + \Delta(t) * saturacion(t) * secuencia(t) * speed \quad (12)$$

$$saturacion = \begin{cases} \Delta(t) > 0 & |E_{max} - creencia(x, y, t - 1)| \\ \Delta(t) < 0 & |E_{min} - creencia(x, y, t - 1)| \end{cases} \quad (13)$$

El *factor saturación* (13), acota el valor del incremento de tal modo que nunca se pasen los valores máximo y mínimo para la creencia. Este factor hace que afectando varias medidas con el mismo peso a la celdilla, las novedosas tengan más influencia, provoquen más cambio en la creencia. Esto permite en la práctica cambios de opinión muy rápidos, para reflejar el posible movimiento de obstáculos. Además cuando se está muy seguro de la ocupación de la celdilla, nuevas observaciones en este sentido apenas aportan información.

El parámetro *speed*, entre 0 y 1, constante para todo el grid, modula la velocidad de cambio de estado. Con él se parametriza el número de medidas necesarias para cambiar totalmente de creencia, menor cuanto mayor es *speed*.

Finalmente el *factor secuencia*, entre 0 y 1, refuerza el efecto de las medidas cuando estas aparecen seguidas, de tal manera que las medidas aisladas quedan aminoradas. Su valor se encuentra entre 0 y 1, y se calcula sobre una pequeña memoria de evidencias asociada a la celdilla. Si la última evidencia aparece en una secuencia de evidencias del mismo signo su influencia será mayor que si las anteriores son de signo contrario. En cierto modo este factor retarda el efecto de las sorpresas hasta que se van confirmando con una secuencia de lecturas en el mismo sentido.

La ecuación diferencial propuesta, por su propia naturaleza ofrece un alto dinamismo en la creencia y logra que las medidas recientes influyan en el estado de ocupación sistemáticamente más que las antiguas. Adicionalmente hemos incluido un *mecanismo de olvido* que periódicamente (1 segundo) multiplica la creencia de todas las celdillas por un factor *olvido* = 0.98. Este mecanismo acerca iterativamente la creencia de ocupación de todas las celdillas al estado de desconocimiento,  $creencia(C_{(x,y)}, t) \simeq 0$  y fuerza a que estas se refresquen constantemente con nuevas observaciones.

#### 3.2 Decisión por mayoría

En cada celdilla  $C_{(x,y)}$  se almacena, con orden temporal, la información que aportan las últimas  $N$  medidas que afectan a la celdilla:  $\Delta(t - 1), \Delta(t - 2), \dots, \Delta(t - N)$ . Sumando los valores en memoria tenemos el peso acumulado. El peso acumulado  $\sum_{i=1}^N peso(i)$  oscila entre  $-N$  y  $+N$ . Con este peso acumulado se estima la ocupación de la celdilla siguiendo la función de la figura 3.

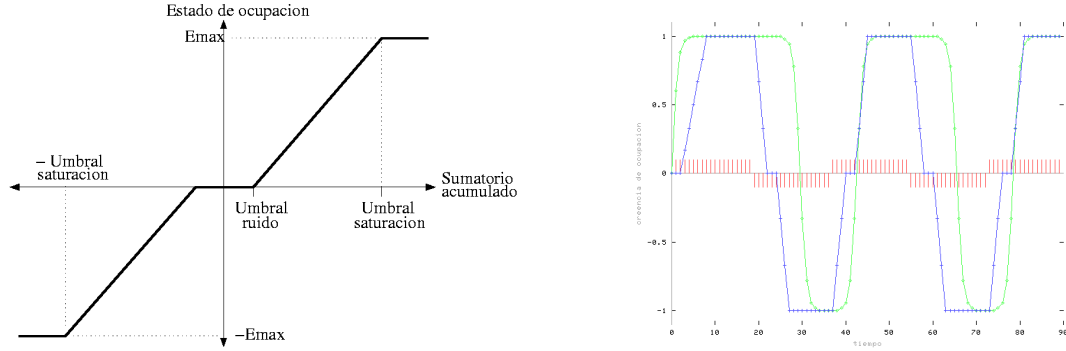


Figura 3: Estado de ocupación en función de los pesos almacenados en la memoria de la celdilla (izda.). Latencia del enfoque por mayoría (dcha.)

En el eje vertical se ve el estado de ocupación final y en las abscisas el peso acumulado en la memoria de la celdilla. El *umbral de ruido* de la figura 3 señala la cantidad mínima de evidencias necesarias para empezar a creer que la celdilla no está libre. Este umbral inferior filtra las medidas erróneas espúreas, pues se necesita más de una medida para confirmar que la celdilla puede estar ocupada. Las celdillas realmente ocupadas o vacías lo superan sin problemas acumulando enseguida evidencias que lo respaldan.

A medida que se acumulan evidencias por encima de ese umbral el estado de ocupación crece linealmente hasta alcanzar el valor máximo en el umbral de saturación. Este umbral superior introduce el fenómeno de saturación en la creencia. Esta saturación equaliza las zonas del espacio por donde más y menos tiempo se ha movido el robot, con tal que las evidencias recogidas sean suficientes para concluir un estado u otro de la celdilla.

Sobre una misma celdilla pueden caer varias evidencias contradictorias, de ocupación y de vacío. Con este enfoque se observa claramente que unas lecturas compensan a otras. La idea aquí es que una lectura errónea no sesga la creencia frente a una mayoría de lecturas correctas. Para modular esa compensación el enfoque permite asignar distintos pesos a evidencias de ocupación, lejanas, cercanas, de vacío, etc.

Con este enfoque la inserción de observaciones nuevas refresca el contenido de la memoria local, de esta manera la creencia de ocupación está siempre actualizada. Adicionalmente hemos añadido un mecanismo artificial de olvido que periódicamente inserta observaciones neutras para eliminar observaciones antiguas. Gracias a esto la creencia acaba envejeciendo en ausencia de lecturas recientes.

## 4 Comparativa experimental

En la literatura existen muchas comparativas [Gambino96],[Ribo01],[Poloni95],[Matía98] pero pocas veces se ha evaluado explícitamente el comportamiento dinámico del algoritmo de construcción automática de mapas. Los enfoques más utilizados tienen un carácter estático subyacente en el cual no importa demasiado la velocidad en adquirir determinada creencia de ocupación, más bien su corrección. La compensación entre medidas persigue principalmente corregir algunas incertidumbres relativas al sensor.

En el caso de mapas dinámicos el estado de ocupación real puede cambiar con el tiempo, por lo tanto la regla de actualización además debe buscar compensar las lecturas antiguas con las recientes. Se desea que la creencia cambie rápidamente si las lecturas nuevas apuntan un cambio en el estado de ocupación actual, para reflejar con vivacidad los movimientos de los obstáculos. Definimos dos ratios que caracterizan el comportamiento dinámico de los algoritmos constructores de representación: *tiempo en incorporar obstáculo (TIO)* y *tiempo en incorporar hueco (TIH)*, que miden precisamente el número de medidas necesarias para que la creencia de ocupación confirme la ocupación o el vacío. Para medirlos utilizaremos unas *secuencias de prueba* que corresponden a observaciones que atañen a una misma celdilla.

En contraposición al criterio de vivacidad tenemos el de robustez frente a lecturas inciertas. Esa compensación necesita cierta latencia para implementarse y una sola medida no modifica significativamente la creencia hasta que se confirma con nuevas observaciones. Entre estos dos criterios contrapuestos el algoritmo elegido establece un compromiso.

## 4.1 Dinamismo del enfoque probabilístico

El modelo probabilístico es el más difundido en la comunidad. Su carácter implícitamente estático se pone de manifiesto por ejemplo cuando tenemos una lectura sensorial absolutamente fiable. Por ejemplo  $p(ocupada/obs(t)) = 0$  si la celdilla está vacía, con lo cual  $\rho_{obs} = 0$  y utilizando (3) lleva a 0 el ratio  $\rho_{mapa}(C_{(x,y)}, t)$  y ya no cambiará sea cuales sean las siguientes lecturas. Así la estimación probabilística se queda bloqueada en  $p(ocupada/obs(t)) = 0$ . Del mismo modo, cuando  $p(ocupada/obs) = 1$ , el ratio  $\rho_{mapa}(C_{(x,y)}, t)$  pasa a valer  $\infty$  y ya no se modificará. La estimación probabilística se queda enganchada en  $p(ocupada/obs(t)) = 1$ . Estos bloqueos obedecen al carácter estático de la estimación probabilística. Cuando una medida es absolutamente cierta entonces ella da el estado real, sea cual sea la creencia acumulada, y la estimación ya no debe cambiar. La regla de Bayes así lo refleja. Sin embargo este funcionamiento obvia que el estado real puede cambiar con el tiempo.

Si no se tienen lecturas absolutamente ciertas, es decir, si los valores del modelo probabilístico de sensor se alejan de los extremos  $[0,1]$ , entonces unas medidas compensan a otras. En estos casos la regla de Bayes ofrece una determinada evolución temporal cuando las medidas que afectan a la celdilla cambian con el tiempo.

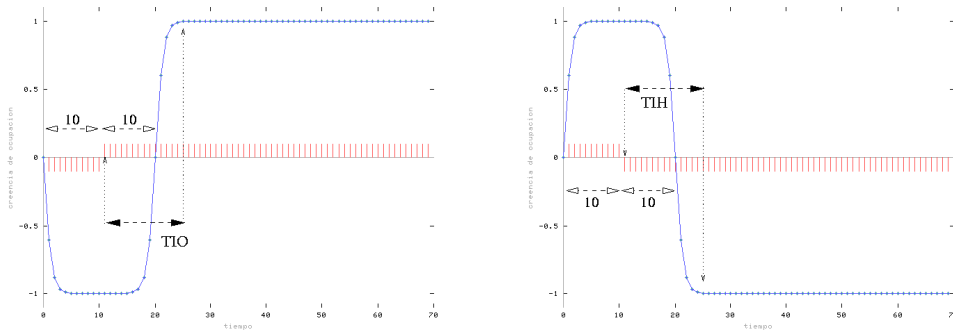


Figura 4: TIO y TIH en el enfoque probabilístico. Para compensar 10 lecturas de vacío se necesitan 10 de ocupación y viceversa.

En la figura 4 el eje horizontal representa el paso del tiempo, la incorporación de una nueva lectura en cada tic. La lectura concreta que se añade en cada tic se aprecia en las pequeñas barritas (+0.1 ó -0.1) alrededor de  $y = 0$ : si es positiva entonces esa lectura aporta una evidencia de ocupación sobre la celdilla en cuestión, si es negativa, evidencia de vacío. Estas lecturas concretas, vistas a lo largo del eje del tiempo, constituyen la secuencia de prueba. En este caso consta de 10 medidas iniciales de vacío y a continuación 60 lecturas que apuntan ocupación en la celdilla. En el eje vertical tenemos el valor de la probabilidad de ocupación acumulada en cada momento, normalizada entre  $[-1,1]$ . El modelo sensorial utilizado  $p(ocupada/obs(t)) = 0.7$  para indicar ocupación y 0.3 para vacío. En la figura 4 se observa que tarda unas 15 medidas en cambiar de creencia desde el instante 10 al 25, es decir tiene un *Tiempo en Incorporar Obstáculo* TIO de 15 lecturas. También se puede apreciar como para compensar una certeza de vacío que se ha conseguido con 10 lecturas de vacío se necesitan otras 10 lecturas en el sentido contrario. Con ese modelo el TIH medido experimentalmente con la secuencia recíproca es el mismo que TIO.

Hemos constatado que se tarda más en cambiar de creencia (es decir, TIO y TIH mayores) cuantas más medidas soportan la creencia anterior. Esto se aprecia en la figura 5, donde la secuencia de prueba consta de intervalos cada vez mayores de lecturas de ocupación y de vacío. La relación concreta entre TIH y TIO depende de los valores concretos del modelo sensorial, pero para valores de modelo simétricos (alrededor de 0.5) se necesita la misma cantidad. Esta inercia ralentiza en exceso el cambio de creencia cuando la presencia actual tiene muchas medidas pasadas que la avalan.

Se podría pensar que valores más pronunciados del modelo sensorial, valores más cercanos a los extremos de probabilidad agilizan esta dinámica. Sin embargo los experimentos realizados lo desmienten. La figura 5 muestra como evoluciona la creencia para distintos valores del modelo probabilístico,  $p(ocupada/obs(t))$  igual a 0.2, 0.3, 0.4 y 0.45 respectivamente. En este caso la secuencia de prueba corresponde a varios periodos de longitud fija, alternando tantas lecturas de ocupación como lecturas de vacío. Para modelos más pronunciados los incrementos de probabilidad son efectivamente mayores que con modelos suaves. Sin embargo la latencia en el cambio de opinión es exactamente la misma para los modelos con  $p(ocupada/obs(t))$  0.3, 0.4 y 0.45.

Parece que el valor del modelo no afecta a la latencia en cambiar de opinión. Esto se explica desde la ecuación (3), donde la compensación entre lecturas la marca el factor  $\rho_{obs}$ . Con modelos simétricos alrede-



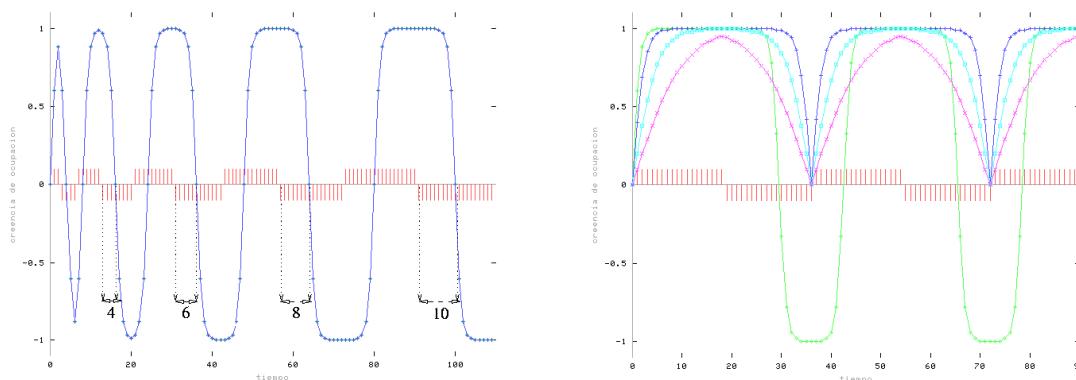


Figura 5: La inercia probabilística depende de la certeza acumulada (izda). Evolución de la creencia con modelos probabilísticos simétricos  $p(ocupada/obs(t)) = 0.45, 0.4, 0.3$  y  $0.2$  respectivamente (dcha.). Sólo el modelo más abrupto rompe la inercia al alcanzar saturación más rápidamente.

Por ejemplo para  $p(ocupada/obs(t)) = 0.4$  y  $0.6$  se cumple que  $\rho_{obs}(0.4) = \frac{1}{\rho_{obs}(0.6)}$ . Esta simetría hace que multiplicar por  $\rho_{obs}(0.4)$  y después por  $\rho_{obs}(0.6)$  deja la probabilidad acumulada igual que estaba. Una observación de vacío compensa a otra de ocupación, y viceversa. Si la creencia de ocupación está avalada por  $n$  lecturas, entonces se necesitan otras tantas en sentido contrario para compensar esa certeza acumulada. Si el modelo es más pronunciado entonces la probabilidad de ocupación sube más rápidamente para el mismo número de lecturas que con modelos suaves, sin embargo el valor de probabilidad alcanza valores mayores y por eso tarda más en bajar, aunque esa bajada también se haga más deprisa que con modelos suaves. Valores asimétricos del modelo sólo consiguen acelerar las subidas de probabilidad frente a las bajadas, o viceversa.

En la práctica la regla de Bayes de la ecuación (3) deja de aplicarse para valores extremos de probabilidad. Por limitaciones de representación el ordenador no puede distinguir valores muy próximos a 1 de 1, ni valores muy próximos a 0 de 0. Una vez que la probabilidad acumulada alcanza 1 ó 0 la regla de Bayes ya no modifica ese valor, sea cual sea la observación. Para evitar este bloqueo debido exclusivamente cuestiones prácticas se acota el valor de la probabilidad entre  $[\delta, 1 - \delta]$ , por ejemplo con  $\delta = 0.0000001$  y truncamos el valor devuelto por la actualización (3) dentro de ese intervalo. Gracias a esta saturación deja de acumularse evidencias en los extremos, que aproximarían aún más la creencia a 1 ó a 0. Este efecto limita la inercia implícita en la aproximación probabilística y hace que valores de modelo más pronunciados tengan efectivamente dinámicas más veloces de cambio de opinión cuando se entra en saturación. Se alcanza antes la saturación que con modelos suaves. Esto explica que la latencia en cambiar de opinión sea menor en la figura 5 para el modelo con  $p(ocupada/obs(t)) = 0.2$ . Es el único que consigue cambiar realmente de opinión porque efectivamente alcanza la saturación. El valor exacto de  $\delta$  y el modelo marcan el tiempo en cambiar de opinión, que es independiente de la cantidad de medidas que avalan la creencia anterior.

## 4.2 Dinamismo de la teoría de evidencia

Siguiendo la teoría de la evidencia la información de una lectura sonar en una celdilla se representa por dos valores:  $(m_{sensor}(E), m_{sensor}(F))$ . Estos valores actualizan la creencia acumulada siguiendo la regla de Dempster-Shafer (6). Esta regla hace que las evidencias acumuladas  $m_{mapa}(E)$  y  $m_{mapa}(F)$  puedan subir o bajar dependiendo de la lectura concreta incorporada.

Al igual que ocurre en el caso probabilístico cuando tenemos una lectura cierta, bien de ocupación  $(0, 1)$  bien de vacío  $(1, 0)$ , esta información lleva la creencia acumulada a la certeza y ahí se queda bloqueada irremediablemente, con independencia de las nuevas medidas que se vayan obteniendo. Este bloqueo refleja el carácter estático inherente a esta aproximación.

Por la misma limitación práctica que comentamos para el caso probabilístico, la evidencia acumulada con este enfoque puede quedarse bloqueada si alcanza esos valores indistinguibles de 1 ó 0. Para evitar este bloqueo también hemos acotado el valor de la evidencia  $m_{mapa}(E)$  y  $m_{mapa}(F)$  entre  $[\delta, 1 - \delta]$ . Esto se traduce en que forzamos una incertidumbre mínima de  $m_{mapa}(E, F) = 2\delta$ .

En los experimentos realizados, después de la incorporación de unas lecturas iniciales, la evolución de la creencia es paralela a la evolución de la probabilidad. La acumulación inicial de evidencias reduce la

incertidumbre  $m_{mapa}(E, F)$  hasta valores próximos a cero y entonces la regla de Dempster-Shafer ofrece el mismo dinamismo que la regla de Bayes. Los mismos comentarios sobre la inercia dependiente de la evidencia acumulada son aplicables en este caso también.

### 4.3 Dinamismo del enfoque borroso

Con el enfoque borroso, a medida que se recogen lecturas sonar se van actualizando los conjuntos borrosos vacíos  $\varepsilon$  y ocupados  $o$  con el operador borroso unión. Con los operadores borrosos del producto algebraico (9), producto acotado (10), operador Dombi, operador Yager utilizados en [Poloni95], [Gambino96] y [Ribo01] se produce un bloqueo irreversible que inhabilita este enfoque cuando se tienen *muchas* medidas sonar. Con esos operadores el grado de pertenencia es una función creciente, que nunca disminuye y acaba llegando a 1. Cuando tanto  $\mu_\varepsilon$  como  $\mu_o$  alcanzan su valor máximo entonces, sea cual sea la compensación que se establezca entre unos y otros, la creencia final de ocupación no cambia, se bloquea indefinidamente.

El problema principal radica en que la evidencia acumulada no disminuye, lo cual no permite rectificar. Supongamos que inicialmente una celdilla está vacía, entonces acumula cierta evidencia de vacío. Si su estado real cambia entonces comienza a acumularse evidencia de ocupación de tal manera que la creencia final  $F = \varepsilon \cap \bar{o}$  se acerca más a la ocupación. Sin embargo la evidencia anterior, no se olvida. Llega un momento en que  $\varepsilon$  u  $o$  alcanzan su valor máximo y ya no cambian su valor. Fenómenos como este ponen de manifiesto la necesidad de un mecanismo de olvido que permita neutralizar la influencia de unas medidas que ya no se corresponden con el estado actual de la celdilla.

Para solventar este bloqueo en trabajos más recientes [Oriolo98] se redefine el operador borroso de unión como una media aritmética ponderada, que da mayor peso a la creencia acumulada. La función de pertenencia al conjunto de celdillas libres  $\varepsilon$  y al de celdillas ocupadas  $o$  entonces sí pueden disminuir cuando se incorpora la información de una nueva lectura.

### 4.4 Dinamismo en enfoque histográfico

Este enfoque tiene una aritmética sencilla de compensación entre unas medidas y otras dada por el modelo sensorial. Esta aritmética hace pesar +3 a las evidencias de ocupación y -1 a las de vacío. Por esta razón se tarda tres veces menos en incorporar un obstáculo TIO que en incorporar un nuevo hueco TIH, según ilustra la figura 6. La linealidad del cambio de creencia contrasta con el efecto más o menos exponencial del enfoque probabilístico en la misma figura (modelo:  $p(ocupada/obs(t)) = 0.2$  y  $0.8$ ).

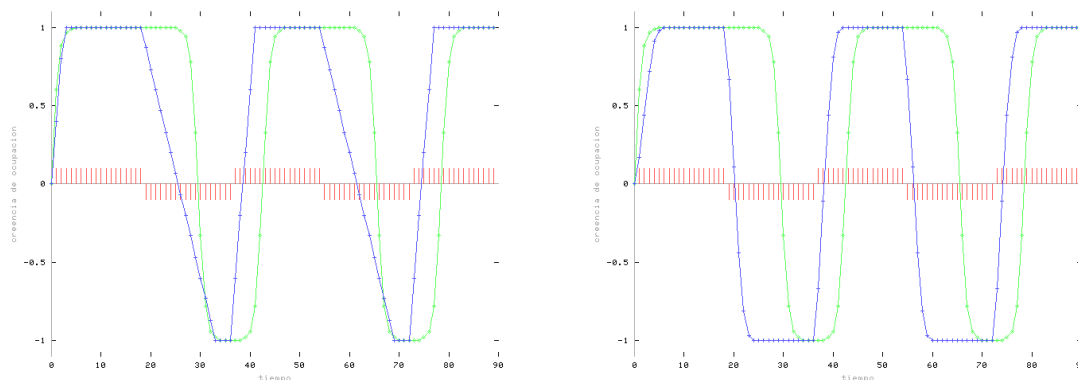


Figura 6: Latencia en el enfoque histográfico (izda.) y con ecuación diferencial (dcha.) frente a probabilístico.

Por otro lado la creencia de ocupación se mueve aquí dentro del intervalo  $[0,15]$ , saturando en ambos extremos. Si la creencia ya se encuentra en un extremo nuevas lecturas en el mismo sentido no cambian literalmente en nada la creencia acumulada, que ya es máxima.

### 4.5 Dinamismo en enfoque con ecuación diferencial

Según se aprecia en la figura 6 el enfoque histográfico con ecuación diferencial cambia más rápidamente de creencia que el enfoque probabilístico (modelo típico:  $p(ocupada/obs(t)) = 0.2$  y  $0.8$ ). Además este dinamismo contrasta con el cambio de creencia *a ritmo constante* (en el producto) que se da en el enfoque bayesiano.

También se puede observar cierta saturación cuando se acumulan evidencias en el mismo sentido, de modo que observaciones recurrentes cada vez provocan menor incremento en la creencia. Sin embargo cuando la nueva observación contradice la creencia acumulada entonces el cambio es significativo, aunque el *factor secuencia* ayuda a diferir ese efecto hasta que se confirma con nuevas observaciones. Por ejemplo se puede ver como la primera observación contraria no tiene tanta influencia como una segunda y una tercera también contrarias.

## 4.6 Dinamismo en enfoque por mayoría

En la figura 3 se aprecia que la creencia actualizada con el enfoque por mayoría es capaz de evolucionar en ambos sentidos si suficientes medidas avalan el cambio. Además de la saturación también se aprecia el efecto del umbral de ruido, que mantiene la creencia nula (indecisa) hasta que se acumulan suficientes evidencias. La latencia depende del tamaño  $N$  de la memoria y los umbrales. Para los experimentos realizados ( $N = 10$ ,  $umbral\ ruido = 2$  y  $umbral\ saturacion = 8$ ) se ofrece menor latencia que el modelo típico con la técnica probabilística ( $p(ocupada/obs(t)) = 0.2$  y  $0.8$ ).

## 5 Conclusiones

Se han repasado las técnicas más populares de construcción y mantenimiento de mapas métricos en forma de rejilla. El enfoque probabilístico, la teoría de evidencia y el enfoque borroso resultan inválidos para representar características que puedan cambiar con el tiempo (por ejemplo la ocupación del espacio cuando hay obstáculos móviles). La principal razón es que tanto la regla de Bayes, la regla de Dempster-Shafer y el operador borroso de unión exhiben la *propiedad asociativa*: dada una secuencia de lecturas sensoriales, el estado final de las celdillas del grid es el mismo con independencia del orden en que se incorporen esas lecturas. Manejando probabilidad  $p(ocupada/r_1, r_2 \dots r_n) = p(ocupada/r_n, r_{n-1} \dots r_1)$ , el operador borroso de unión  $\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{i=k} \varepsilon^i$  es asociativo y lo mismo ocurre con la regla de Dempster-Shafer  $((m_1 \oplus m_2) \oplus m_3)(E) = ((m_2 \oplus m_3) \oplus m_1)(E)$ .

Esta propiedad les confiere un carácter inherentemente estático que les invalida para representar características dinámicas. En estos casos interesa que los valores sensoriales recientes pesen más que los antiguos, posiblemente obsoletos, a la hora de estimar la situación real. Sin embargo en estos enfoques la influencia de una medida en la creencia no depende de la antigüedad de la observación, todas pesan por igual, y su efecto no se olvida con el paso del tiempo. Esto hace que la influencia de una nueva observación tenga a *todas* las lecturas pasadas como inercia. Por ejemplo supongamos una *secuencia<sub>A</sub>* de 200 observaciones con las 100 primeras apuntando ocupación y las 100 últimas apuntando vacío, correspondiendo a un obstáculo que se sale de una celdilla. Asumamos también una *secuencia<sub>B</sub>*, inversa de la primera, correspondiente a un obstáculo que irrumpe en una celdilla anteriormente vacía. Sin mencionar los bloqueos que hemos comentado anteriormente la creencia acumulada sería la misma con ambas secuencias, debido a la propiedad asociativa. Sin embargo parece claro que la creencia final debería ser distinta para una secuencia que para su inversa.

El enfoque probabilístico bayesiano muestra una inercia proporcional a las evidencias acumuladas, lo que ralentiza en exceso su cambio de creencia. En general necesita tantas evidencias de ocupación como de desocupación para cambiar el sentido de su estimación. En la práctica ofrece un mayor dinamismo debido a una limitación práctica que obliga a manejar valores de probabilidad en el intervalo  $[\delta, 1 - \delta]$ . Esta restricción desvirtúa todas las asunciones de probabilidad hechas y no forma parte explícita del formalismo bayesiano.

La teoría de la evidencia deriva en los mismos resultados que la probabilística una vez que se incorpora un reducido número de lecturas iniciales. Después de esas medidas la ambigüedad en la estimación  $m_{mapa}(E, F)$  se anula y la evolución de ambos enfoques es similar. Las mismas restricciones se aplican.

El enfoque borroso clásico presenta un bloqueo inaceptable tras incorporar un pequeño número de lecturas sensoriales. No funciona bien si se tiene un flujo continuo de medidas. La razón de este bloqueo radica que el operador borroso de unión sea una función monótona creciente. Nuevos trabajos dentro de este enfoque [Oriolo98] proponen nuevos operadores borrosos que superan este bloqueo y lo acercan a una sencilla media aritmética.

Por el contrario el enfoque histográfico, de decisión por mayoría y el basado en ecuación diferencial sí reflejan el dinamismo de la realidad. Todos ellos distinguen entre *secuencia<sub>A</sub>* y *secuencia<sub>B</sub>*, el estado final es distinto en ambos casos. En estos enfoques por muy seguros que estemos de que tal celdilla está ocupada, basta un número relevante de lecturas en sentido contrario para cambiar radicalmente de creencia. Este dinamismo de representación es imprescindible para representar obstáculos móviles y resulta útil incluso con obstáculos estáticos si se arrastran errores de localización. El uso de técnicas estáticas obliga a mantener una localización absoluta precisa, para no mezclar evidencias de distintas celdillas.

El trabajo en el futuro inmediato apunta a segmentar el grid dinámico de ocupación y a utilizar las técnicas dinámicas para detectar puertas sin localización absoluta fiable.

## Referencias

- [Borenstein91] J. Borenstein, Y. Koren, *Histogrammic in-motion mapping for mobile robot obstacle avoidance*, IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol 7, No 4, 1991, pp. 535-539.
- [Delahoche98] L. Delahoche, C. Pégard, E. M. Mouaddib, P. Vasseur, *Incremental map building for mobile robot navigation in an indoor environment*, Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation ICRA-98, Leuven (Belgica), 1998.
- [Elfes89] Alberto Elfes, *Occupancy grids: a probabilistic framework for mobile robot perception and navigation*, Tesis Doctoral, Electrical and Computer Engineering Department, Carnegie Mellon University, 1989.
- [Elfes90] A. Elfes, *Occupancy grids: a stochastic spatial representation for active robot perception*, Proceedings of the Sixth Conference on Uncertainty in AI, July 1990, Morgan Kaufmann Publishers, Inc..
- [Gambino96] Fabio Gambino, Giuseppe Oriolo and Giovanni Ulivi, *A comparison of three uncertainty calculus techniques for ultrasonic map building*, Proceedings of the 1996 SPIE Symp. on Aerospace/Defense Sensing and Control, Applications of fuzzy logic technologies-III, pp 249-260, 1996.
- [Howard96] A. Howard y L. Kitchen, *Generating sonar maps in highly specular environments*, Proceedings of the 4th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision ICARCV'96, pp 1870-1874, Singapore, 1996.
- [Leonard92] J.J. Leonard, H. Durrant-Whyte and I.J. Cox, *Dynamic Map Building for an Autonomous Mobile Robot*, Int J. of Robotics Research, 11, 4, 286-298, (1992).
- [Margaritis98] D. Margaritis y S. Thrun, *Learning to locate an object in 3D space from a sequence of images*. En actas de la International Conference on Machine Learning, páginas 332-340, 1998.
- [Martin96] Martin C. Martin y Hans P. Moravec, *Robot Evidence Grids*, Technical Report CMU-RI-TR-96-06, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 1996.
- [Matía98] C. Peignot, F. Wawak, F. Matía y E.A. Puente, *Integration of heterogeneous world mapping techniques in the navigation system of an autonomous mobile robot*, Computer Vision and Mobile Robotics Workshop CVMR'98, Santorini (Greece), 1998.
- [Matía98b] F. Matía y A. Jiménez, *Multisensor fusion: an autonomous mobile robot*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, 22, 1998, páginas 129-141, Kluwer Academic Publishers.
- [Moravec88] H.P. Moravec, *Certainty grids for sensor fusion in mobile robots*, AI Magazine v9#2, páginas 61-77, 1988.
- [Oriolo98] G. Oriolo, G. Ulivi, M. Venditelli, *Real-time map building and navigation for autonomous robots in unknown environments*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B-cybernetics, Vol 28, Num 3, Junio 1998.
- [Pagac98] D. Pagac, E. Nebot, H. Durrant-Whyte, *An evidential approach to probabilistic map-building*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol 14, Num 4, August 1998, pp 623-629.
- [Poloni95] M. Poloni, G. Ulivi, M. Venditelli, *Fuzzy logic and autonomous vehicles: experiments in ultrasonic vision* Fuzzy Sets and Systems 69, pp 15-27, 1995.
- [Ribo01] M. Ribo, A. Pinz, *A comparison of three uncertainty calculi for building sonar-based occupancy grids*, Robotics and Autonomous Systems, Vol 35, 2001, pp 201-109, Elsevier.